

Examenul național de bacalaureat 2021  
Proba E. c)

Matematică  $M_{\text{mate-info}}$

Testul 8

Filiera teoretică, profilul real, specializarea matematică-informatică

Filiera vocațională, profilul militar, specializarea matematică-informatică

- Toate subiectele sunt obligatorii. Se acordă zece puncte din oficiu.
- Timpul de lucru efectiv este de trei ore.

SUBIECTUL I

(30 de puncte)

- 5p 1. Determinați produsul elementelor mulțimii  $A = \{x \in \mathbb{N} \mid \sqrt[3]{7} < x \leq \log_2 21\}$ .
- 5p 2. Se consideră funcția  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f(x) = x^2 + 4x$ . Determinați abscisele punctelor de intersecție a graficului funcției  $f$  cu dreapta  $d$  de ecuație  $y = 5x + 2$ .
- 5p 3. Rezolvați în mulțimea numerelor reale ecuația  $2 \cdot 9^x - 3^{2x} - 3 = 0$ .
- 5p 4. Calculați probabilitatea ca, alegând un număr din mulțimea numerelor naturale de trei cifre, acesta să aibă cifrele numere prime distincte.
- 5p 5. Se consideră punctul  $M$  în planul triunghiului  $ABC$  astfel încât  $2\overline{MB} - \overline{MC} = \overline{AB}$ . Arătați că patrulaterul  $AMBC$  este paralelogram.
- 5p 6. Calculați  $\operatorname{tg} x$ , știind că  $x \in \left(\pi, \frac{3\pi}{2}\right)$  și  $\sin x = -\frac{8}{17}$ .

SUBIECTUL al II-lea

(30 de puncte)

1. Se consideră matricea  $A(a) = \begin{pmatrix} a+1 & 1 & a \\ 1 & -1 & -a \\ 2-a & 1 & 1 \end{pmatrix}$  și sistemul de ecuații  $\begin{cases} (a+1)x + y + az = -5 \\ x - y - az = 10 \\ (2-a)x + y + z = 1-a \end{cases}$ ,

unde  $a$  este număr real.

- 5p a) Arătați că  $\det(A(2)) = 4$ .
- 5p b) Determinați numerele reale  $a$  pentru care sistemul de ecuații **nu** este compatibil determinat.
- 5p c) Determinați numărul natural  $a$  pentru care sistemul are soluția unică  $(x_0, y_0, z_0)$  și  $x_0$  este număr întreg.
2. Pe mulțimea numerelor reale se definește legea de compoziție asociativă și cu element neutru  $x * y = x + y - \frac{xy}{5}$ .
- 5p a) Arătați că  $1 * 5 = 5$ .
- 5p b) Determinați numărul real  $x$ ,  $x \geq 0$ , pentru care  $\sqrt{x} * \sqrt{x} = 5$ .
- 5p c) Determinați valorile reale ale lui  $a$ ,  $a \neq 5$ , pentru care simetricul lui  $a$  în raport cu legea de compoziție „ $*$ ” este strict mai mic decât 0.

SUBIECTUL al III-lea

(30 de puncte)

1. Se consideră funcția  $f: (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f(x) = (x-1)\ln(x+1)$ .
- 5p a) Arătați că  $f'(x) = 1 + \ln(x+1) - \frac{2}{x+1}$ ,  $x \in (0, +\infty)$ .
- 5p b) Calculați  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left( f(x) f\left(\frac{1}{x}\right) \right)$ .
- 5p c) Demonstrați că orice două drepte distincte, tangente la graficul funcției  $f$ , sunt concurente.

2. Se consideră funcția  $f : (-1, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f(x) = \frac{3x}{\sqrt{x+1}}$ .

5p a) Arătați că  $\int_1^2 x\sqrt{x+1}f(x)dx = 7$ .

5p b) Calculați  $\int_0^1 f^2(x)dx$ .

5p c) Știind că  $F : (-1, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $F(x) = 2(x+1)\sqrt{x+1} - 6\sqrt{x+1} + 4$  este o primitivă a funcției  $f$ ,  
arătați că  $\int_0^3 f(x)F(x)dx = 32$ .